UNIVERSITE PARIS 1 – PANTHEON SORBONNE

L3 ECONOMIE

Année 2011-2012

INTRODUCTION A L'ECONOMETRIE

C. DOZ

Fiche de TD n°1

EXERCICE 1

Une entreprise fabrique des billes pour roulement à billes, dont le diamètre doit être précisément égal à 5 mm. En pratique, on considère que le diamètre des billes fabriquées est une variable aléatoire X qui suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Le responsable du contrôle qualité prélève au hasard un échantillon de $N = 100$ billes dont il mesure le diamètre en mm avec un instrument de précision. On notera X_n le diamètre de la n^{eme} bille mesurée.

1. Quel estimateur $\hat{m}$ prend-on pour m et quelle est la loi de cet estimateur ?
2. Quel estimateur $\hat{\sigma}^2$ prend-on pour σ^2 et quelle est la loi de cet estimateur ?
3. i) Construire le test de l'hypothèse $H_0 : m = 5$ contre $H_1 : m \neq 5$ au niveau 5%.
   ii) Quelle conclusion tire-t-on si les résultats mesures donnent :

$$\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n = 5,3 \quad \text{et} \quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(X_n - \overline{X}_N)^2 = 1,3$$

EXERCICE 2

On observe un échantillon de taille n d'une variable aléatoire Y suivant une loi normale d'espérance m et dont la variance est connue : $\sigma^2 = 1$.

1. Quel estimateur proposez-vous pour le paramètre m et pourquoi ? Quelle est la loi de cet estimateur ?
2. On suppose *a priori* dans cette question que $m \leq 1$.
   i) Construire le test au seuil α de l'hypothèse nulle $H_0 : m = 1$ contre l'hypothèse $H_1 : m < 1$.
   ii) Quelle conclusion tirez-vous si $\alpha = 0,05$, $n = 75$, et $\bar{y}_n = 0,85$?
   iii) Même question pour $\alpha = 0,05$, $n = 300$, et $\bar{y}_n = 0,85$.
3. On ne fait plus d'hypothèse *a priori* sur m et on s'intéresse cette fois au test de l'hypothèse $\tilde{H}_0 : m \geq 1$ contre l'hypothèse H_1.
   La région critique a la même forme qu'à la question précédente.
   i) Calculez, en fonction de la vraie valeur inconnue de m, la probabilité $p(m)$ de rejeter $\tilde{H}_0$
   ii) Montrez que $\text{Max}\{p(m), m \geq 1\} = p(1)$.
   iii) En déduire que le test a même région critique que celui de la question précédente.
4. pour $\alpha = 0,05$, calculez la puissance du test pour les valeurs suivantes de m :

$$m = 0,4 \ ; \ 0,5 \ ; \ 0,7 \ ; \ 0,8 \ ; \ 0,85 \ ; \ 0,9$$

   lorsque $n = 75$, puis lorsque $n = 300$. Commentez.

EXERCICE 3 (facultatif : à ne traiter que si le temps imparti le permet)

On suppose que les notes d'économétrie obtenues à l'examen par les étudiants de L3 sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi normale d'espérance m et de variance σ^2.

Le professeur corrige d'abord les copies du groupe de TD n^o 1, dont l'effectif est de 35 étudiants, dans le but de voir si son barème est convenable.

Dans la suite, on désigne par n l'effectif de ce groupe de TD ($n = 35$), et par $Y_i, i = 1, \ldots, n$ les notes obtenues.

1. Le professeur estime m par $\hat{m} = \overline{Y}$ et σ^2 par $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$.
   i) Quelle propriété particulière ces estimateurs possèdent-ils ?
   ii) Quelle est la loi de $\hat{m}$?
   iii) Quelle est la loi de $\hat{\sigma}^2$?
2. Le professeur s'intéresse au test de l'hypothèse $H_0 : m \leq 10$ contre l'hypothèse $H_1 : m > 10$.
   i) Quelle est l'intention de ce professeur en faisant ce choix pour H_0 et H_1 ?
   ii) Comment construit-on le test au niveau $\alpha = 0,05$?
   iii) Les valeurs obtenues sont $\overline{Y} = 10,53$ et $\hat{\sigma}^2 = 3,24$. Quelle est la conclusion du test ? Que va faire le professeur ?